

Chapitre 11

**Dynamique terrestre, pendule de Foucault et
système de points matériels**



11.1 Dynamique terrestre

11.1.1 Champ gravitationnel terrestre

11.1.2 Mouvement relatif vertical

11.1.3 Mouvement relatif horizontal

11.2 Pendule de Foucault

11.3 Système de points matériels

11.3.1 Centre de masse

11.3.2 Cinématique d'un système de points matériels

11.3.3 Dynamique d'un système de points matériels

11.3.4 Principes de conservation

11.1 Dynamique terrestre

11.1.1 Champ gravitationnel terrestre

11.1.2 Mouvement relatif vertical

11.1.3 Mouvement relatif horizontal

- **Référentiel accéléré** : la terre n'est pas un référentiel d'inertie puisqu'elle a deux mouvements de rotation :

① **Rotation autour du soleil :**

$$T' = 1 \text{ an} \quad \text{ainsi} \quad \Omega' = 1.99 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-1}$$

② **Rotation propre :**

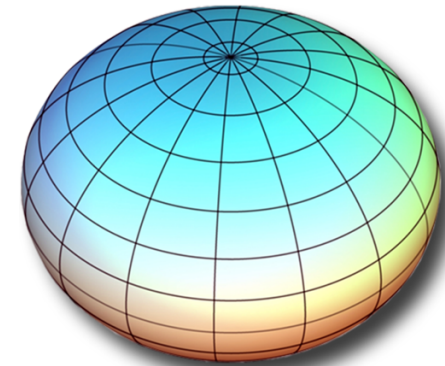
$$T = 1 \text{ jour} \quad \text{ainsi} \quad \Omega = 7.27 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

ainsi la rotation propre domine : $\Omega' \ll \Omega$

- **Excentricité** : la terre est un ellipsoïde de révolution dû à la force centrifuge F_c :

$$e = \sqrt{1 - \frac{r_-^2}{r_+^2}} = 0.08 \ll 1 \quad (11.1)$$

- **Rayon moyen** : on considère à présent que la terre est une sphère de rayon $r = 6371 \text{ km}$.



La terre est un ellipsoïde aplati aux pôles

$$r_+ = 6378 \text{ km}$$

$$r_- = 6357 \text{ km}$$

- **Observateur** : point matériel P sur terre
- **Référentiel absolu** : système solaire (fixe)

Repère absolu $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$

- **Référentiel relatif** : terre (en rotation)

Repère relatif $(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3)$

- **Angle de latitude et angle nodal** :

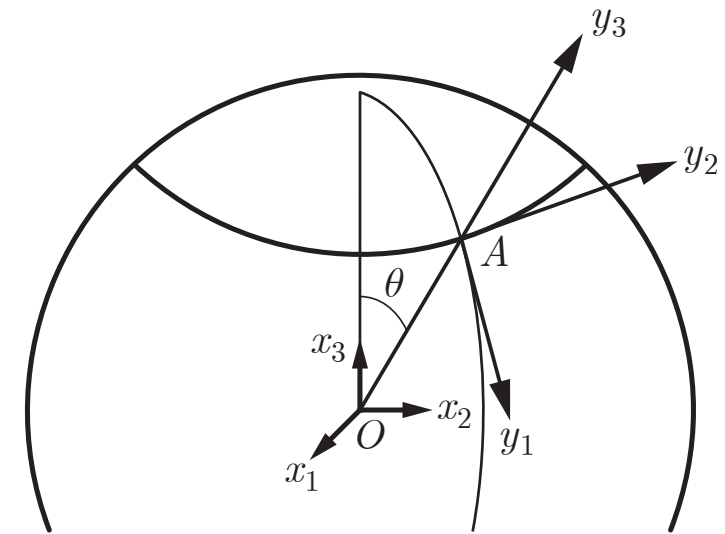
$$\lambda = \frac{\pi}{2} - \theta$$

- **Vitesse angulaire de rotation** :

$$\Omega = \text{cste} \quad \text{ainsi} \quad \dot{\Omega} = 0 \quad (11.2)$$

- **Loi du mouvement relatif** :

$$\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} + \sum \mathbf{F}^{\text{in}} = \sum \mathbf{F}^{\text{ext}} + \mathbf{F}_i + \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_C = m \mathbf{a}_r(P) \quad (11.3)$$



Le point A se situe au niveau de la mer sous le point P et entre les points O et P .

- **Loi du mouvement relatif :** (11.3)

$$\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} + \mathbf{F}_i + \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_C = m \mathbf{a}_r(P)$$

- **Force inertielle :** MCU de A (11.4)

$$\mathbf{F}_i = -m \mathbf{a}_a(A) = -m \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{OA})$$

- **Force centrifuge :** où $\mathbf{r}_r(P) = \mathbf{AP}$

$$\mathbf{F}_c = -m \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{AP}) \quad (11.5)$$

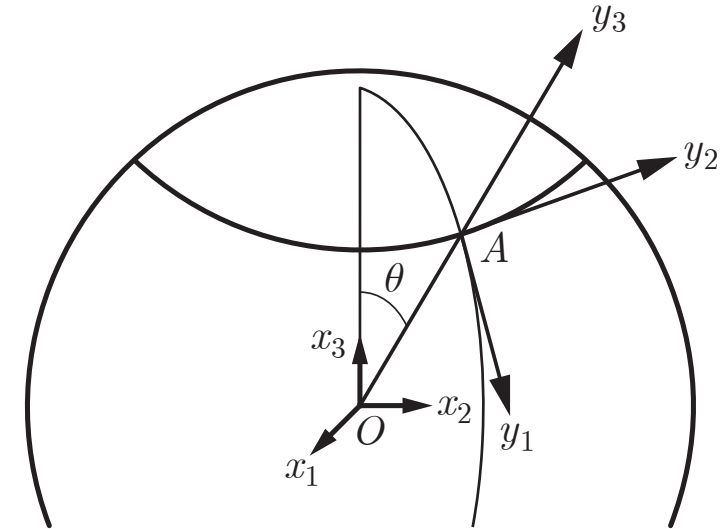
- **Force de Coriolis :**

$$\mathbf{F}_C = -2m \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_r(P) \quad (10.55)$$

- **Loi du mouvement relatif :** point matériel P (11.6)

$$\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} - m \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{OA} + \mathbf{AP})) - 2m \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_r(P) = m \mathbf{a}_r(P)$$

- Pour déterminer l'effet de la rotation de la terre sur le champ gravitationnel terrestre, on considère un pendule à l'équilibre sur terre.



Le point A se situe au niveau de la mer sous le point P et entre les points O et P .

- **Pendule** : à l'équilibre sur terre

$$\mathbf{v}_r(P) = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \mathbf{a}_r(P) = \mathbf{0} \quad (11.7)$$

- **Equilibre** : loi du mouvement (11.8)

$$\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} - m \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{OA} + \mathbf{AP})) = \mathbf{0}$$

- **Approximation** : (11.9)

$$\|\mathbf{AP}\| \ll \|\mathbf{OA}\| \quad \text{ainsi} \quad \mathbf{OP} \simeq \mathbf{OA}$$

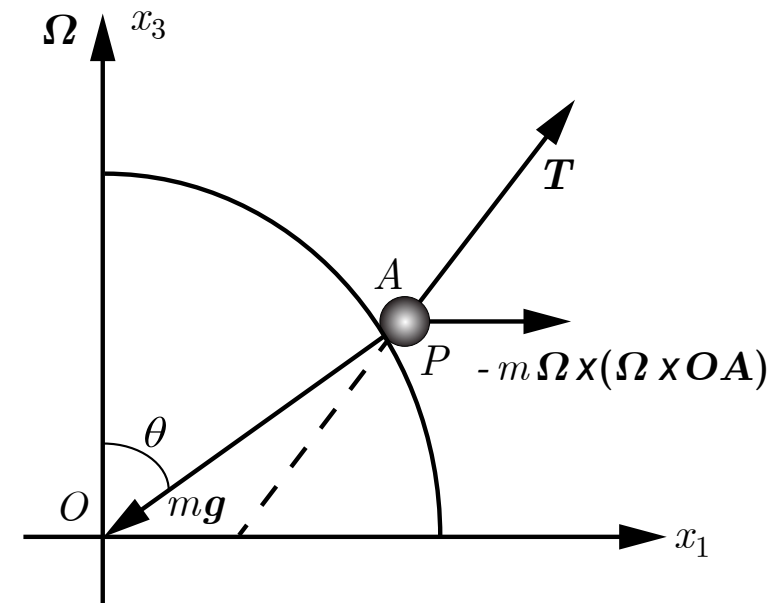
- **Forces extérieures** :

- 1 **Poids** : $\mathbf{P} = m \mathbf{g}$

- 2 **Tension** : $\mathbf{T}$

- **Equilibre** : référentiel relatif de la terre

$$\mathbf{P} + \mathbf{T} - m \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{OA}) = \mathbf{0} \quad (11.10)$$



- **Poids réel** : $P = m g$ dû uniquement à l'attraction gravitationnelle de la terre est orienté vers le centre de la terre O .
- **Poids apparent** : $P' = m g'$ dû à l'attraction gravitationnelle de la terre et à la rotation de la terre compense la tension du fil T à l'équilibre.
- **Equilibre** : référentiel relatif de la terre

$$P' + T = 0 \quad \text{ainsi} \quad P' = -T \quad (11.11)$$

- **Tension** :

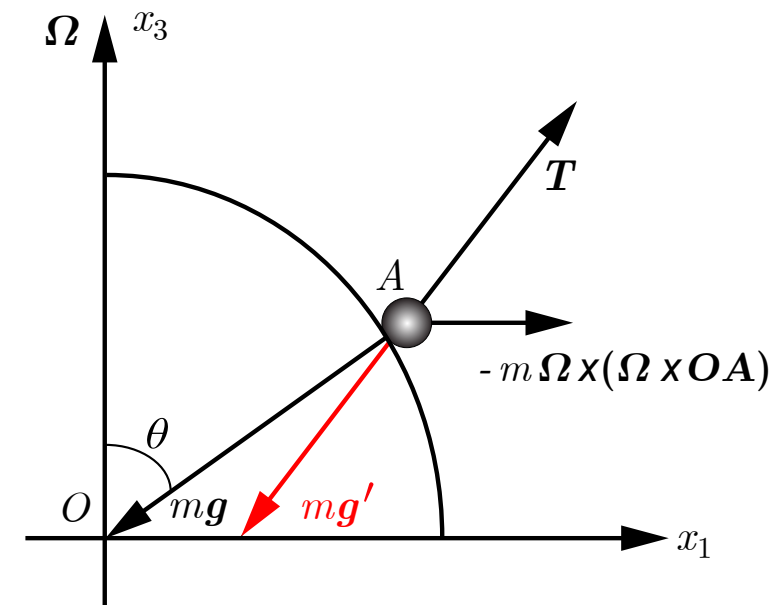
$$T = -m \left(g - \Omega \times (\Omega \times OA) \right) \quad (11.12)$$

- **Poids apparent** : (11.13)

$$P' = m g' = -T = m \left(g - \Omega \times (\Omega \times OA) \right)$$

- **Champ gravitationnel apparent** :

$$g' = g - \Omega \times (\Omega \times OA) \quad (11.14)$$



- **Champ gravitationnel apparent :**

$$g' = g - \Omega \times (\Omega \times OA) \quad (11.14)$$

- **Différence des champs gravitationnels :**

$$g - g' = - (g - g') \hat{x}_1 \quad \text{où} \quad g > g'$$

- **Accélération centripète :** où $r = \|OA\|$

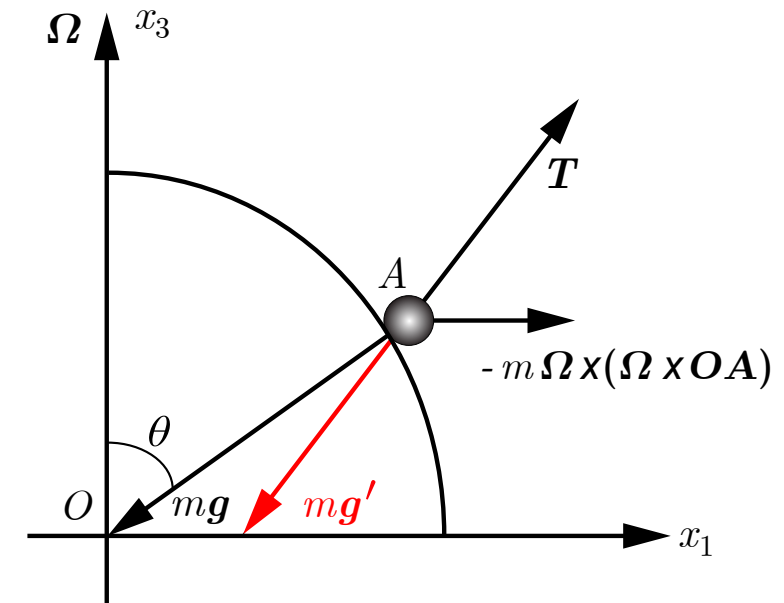
$$\Omega \times (\Omega \times OA) = \Omega^2 r \hat{x}_3 \times (\hat{x}_3 \times (\sin \theta \hat{x}_1 + \cos \theta \hat{x}_3)) = -r \Omega^2 \sin \theta \hat{x}_1$$

- **Angle de latitude et angle nodal :**

$$\lambda = \frac{\pi}{2} - \theta \quad \text{ainsi} \quad \sin \theta = \cos \lambda \quad (11.17)$$

- **Champ gravitationnel apparent : norme**

$$g' = g - r \Omega^2 \sin \theta = g - r \Omega^2 \cos \lambda \quad (11.18)$$



- **Champ gravitationnel apparent** : norme

$$g' = g - r \Omega^2 \cos \lambda \quad (11.18)$$

- ① **Equateur** : $\lambda = 0$ ainsi $\cos \lambda = 1$

$$g' = g - r \Omega^2 \quad (11.19)$$

- ② **Pôles** : $\lambda = \pm \pi/2$ ainsi $\cos \lambda = 0$

$$g' = g \quad (11.20)$$

- ③ **Lausanne** : $\lambda = 0.80$ ainsi $\cos \lambda = 0.69$

$$g' = g - 0.69 r \Omega^2 \quad (11.21)$$

- **Application numérique** : correction relative à Lausanne (11.22)

$$\frac{\delta g}{g} = \frac{g - g'}{g} = \frac{0.69 r \Omega^2}{g} = \frac{0.69 \cdot 6.371 \cdot 10^6 \cdot (7.27 \cdot 10^{-5})^2}{9.81} = 0.24\%$$

La correction relative est si faible qu'on va dorénavant considérer que le poids apparent $\mathbf{P}' = m \mathbf{g}'$ est égal au poids réel $\mathbf{P} = m \mathbf{g}$ en première approximation et qu'il est donc orienté vers le centre de la terre O .

- **Modèle** : influence de la rotation de la terre sur un tir vertical ou un mouvement de chute libre.
- **Force extérieure** : poids apparent égal au poids réel (approximation)

$$\mathbf{F}^{\text{ext}} = \mathbf{P}' = \mathbf{P} \quad (11.23)$$

qui contient la force inertielle (11.4)

$$\mathbf{F}_i = -m \mathbf{a}_a(A) = -m \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{OA})$$

où on a négligé la force centrifuge (11.5)

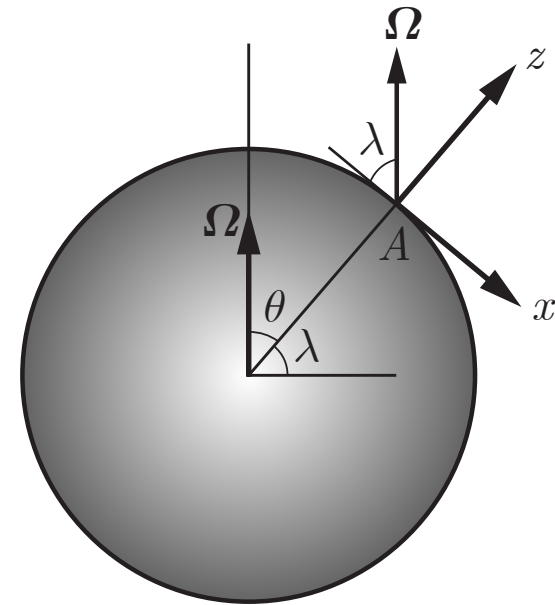
$$\mathbf{F}_c = -m \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{AP}) \quad \text{car} \quad \|\mathbf{OA}\| \gg \|\mathbf{AP}\|$$

- **Force d'inertie** : force de Coriolis

$$\mathbf{F}^{\text{in}} = \mathbf{F}_C = -2m \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_r(P) \quad (10.55)$$

- **Loi du mouvement relatif** : (11.23) dans (11.23)

$$\mathbf{F}^{\text{ext}} + \mathbf{F}^{\text{in}} = \mathbf{P} + \mathbf{F}_C = m \mathbf{a}_r(P) \quad (11.24)$$



- Loi du mouvement relatif :

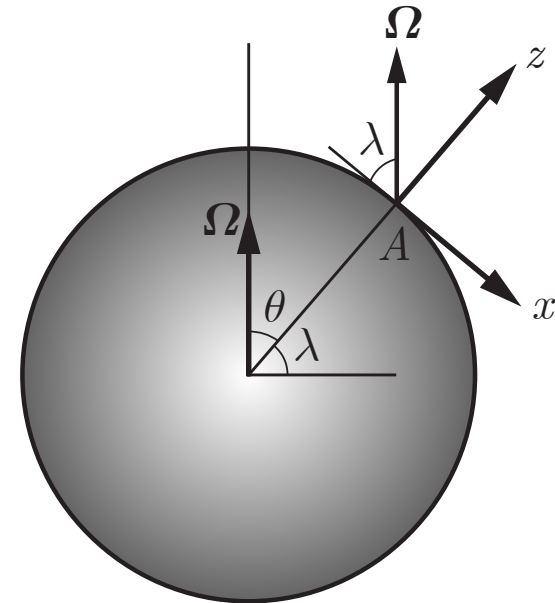
$$\mathbf{P} + \mathbf{F}_C = m \mathbf{a}_r (P) \quad (11.24)$$

- Grandeurs cinématiques relatives :

$$\mathbf{v}_r (P) = \dot{x} \hat{\mathbf{x}} + \dot{y} \hat{\mathbf{y}} + \dot{z} \hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{a}_r (P) = \ddot{x} \hat{\mathbf{x}} + \ddot{y} \hat{\mathbf{y}} + \ddot{z} \hat{\mathbf{z}} \quad (11.25)$$

$$\boldsymbol{\Omega} = -\Omega \cos \lambda \hat{\mathbf{x}} + \Omega \sin \lambda \hat{\mathbf{z}}$$



- Poids :

$$\mathbf{P} = m \mathbf{g} = -mg \hat{\mathbf{z}} \quad (11.26)$$

- Force de Coriolis :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_C &= -2m \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_r (P) \\ &= -2m (-\Omega \cos \lambda \hat{\mathbf{x}} + \Omega \sin \lambda \hat{\mathbf{z}}) \times (\dot{x} \hat{\mathbf{x}} + \dot{y} \hat{\mathbf{y}} + \dot{z} \hat{\mathbf{z}}) \end{aligned} \quad (11.27)$$

$$= 2m \Omega \dot{y} \sin \lambda \hat{\mathbf{x}} - 2m \Omega (\dot{z} \cos \lambda + \dot{x} \sin \lambda) \hat{\mathbf{y}} + 2m \Omega \dot{x} \cos \lambda \hat{\mathbf{z}}$$

- Loi du mouvement relatif :

$$\mathbf{P} + \mathbf{F}_C = m \mathbf{a}_r(P) \quad (11.24)$$

- Accélération relative :

$$\mathbf{a}_r(P) = \ddot{x} \hat{\mathbf{x}} + \ddot{y} \hat{\mathbf{y}} + \ddot{z} \hat{\mathbf{z}} \quad (11.25)$$

- Poids :

$$\mathbf{P} = m \mathbf{g} = -mg \hat{\mathbf{z}} \quad (11.26)$$

- Force de Coriolis : (11.27)

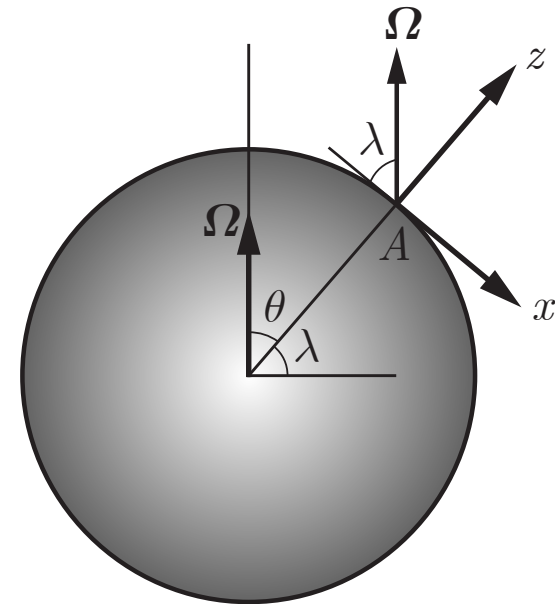
$$\mathbf{F}_C = 2m\Omega \dot{y} \sin \lambda \hat{\mathbf{x}} - 2m\Omega (\dot{z} \cos \lambda + \dot{x} \sin \lambda) \hat{\mathbf{y}} + 2m\Omega \dot{y} \cos \lambda \hat{\mathbf{z}}$$

- Equations du mouvement relatif :

$$\textcircled{1} \text{ selon } \hat{\mathbf{x}} : \quad 2m\Omega \dot{y} \sin \lambda = m\ddot{x}$$

$$\textcircled{2} \text{ selon } \hat{\mathbf{y}} : \quad -2m\Omega (\dot{z} \cos \lambda + \dot{x} \sin \lambda) = m\ddot{y} \quad (11.28)$$

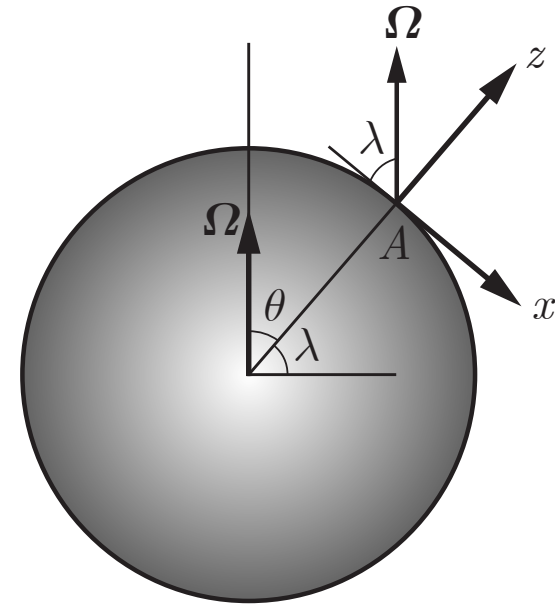
$$\textcircled{3} \text{ selon } \hat{\mathbf{z}} : \quad -mg + 2m\Omega \dot{y} \cos \lambda = m\ddot{z}$$



- **Equations du mouvement relatif :**

divisées par la masse m

- ① $\ddot{x} = 2 \Omega \dot{y} \sin \lambda$
- ② $\ddot{y} = -2 \Omega (\dot{z} \cos \lambda + \dot{x} \sin \lambda) \quad (11.29)$
- ③ $\ddot{z} = -g + 2 \Omega \dot{y} \cos \lambda$



- **Conditions initiales :** position et vitesse relatives verticales

$$\mathbf{r}_r(0) = z_0 \hat{\mathbf{z}} \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_r(0) = v_0 \hat{\mathbf{z}} \quad (11.30)$$

- **Equations de la vitesse relative :** intégration de (11.29) de 0 à t

- ① $\dot{x} = 2 \Omega y \sin \lambda$
- ② $\dot{y} = -2 \Omega \left((z - z_0) \cos \lambda + x \sin \lambda \right) \quad (11.31)$
- ③ $\dot{z} - v_0 = -gt + 2 \Omega y \cos \lambda$

- **Equations du mouvement relatif :** (11.29)

- 1 $\ddot{x} = 2 \Omega \dot{y} \sin \lambda$

- 2 $\ddot{y} = -2 \Omega (\dot{z} \cos \lambda + \dot{x} \sin \lambda)$

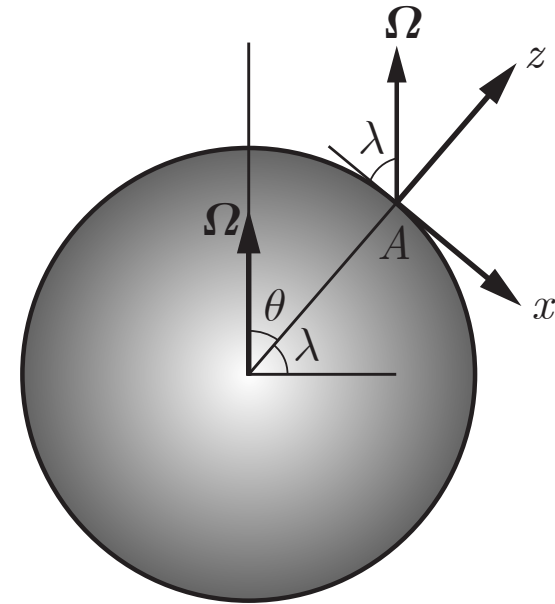
- 3 $\ddot{z} = -g + 2 \Omega \dot{y} \cos \lambda$

- **Equations de la vitesse relative :** (11.31)

- 1 $\dot{x} = 2 \Omega y \sin \lambda$

- 2 $\dot{y} = -2 \Omega \left((z - z_0) \cos \lambda + x \sin \lambda \right)$

- 3 $\dot{z} = -gt + v_0 + 2 \Omega y \cos \lambda$



- **Equation du mouvement relatif :** selon l'axe Ay (11.31) dans (11.29)

$$\ddot{y} = -2 \Omega \cos \lambda (v_0 - gt + 2 \Omega y \cos \lambda) - 2 \Omega \sin \lambda (2 \Omega y \sin \lambda) \quad (11.32)$$

- **Approximation :** $\Omega^2 y \ll \Omega v_0$: on néglige les termes en Ω^2 au 1^{er} ordre

$$\ddot{y} = -2 \Omega \cos \lambda (v_0 - gt) \quad (11.33)$$

- **Equations de la vitesse relative :** (11.31)

- ① $\dot{x} = 2 \Omega y \sin \lambda$

- ③ $\dot{z} = -gt + v_0 + 2 \Omega y \cos \lambda$

- **Equation du mouvement relatif :**

$$\ddot{y} = -2 \Omega \cos \lambda (v_0 - gt) \quad (11.33)$$

- **Conditions initiales :** vitesse et position relative axe Ay

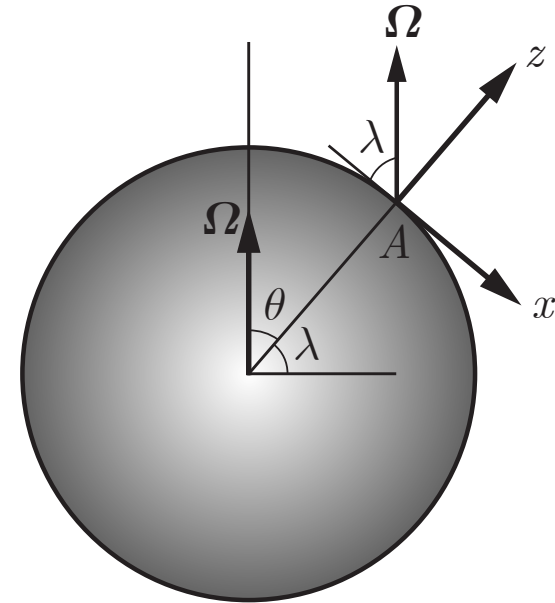
$$y(0) = 0 \quad \text{et} \quad \dot{y}(0) = 0 \quad (11.34)$$

- **Equation de la vitesse :** intégration de (11.33) de 0 à t

$$\dot{y}(t) = -\Omega \cos \lambda (2v_0 t - gt^2) \quad (11.35)$$

- **Equation horaire relative :** intégration de (11.35) de 0 à t

$$y(t) = -\Omega \cos \lambda \left(v_0 t^2 - \frac{1}{3} gt^3 \right) \quad (11.36)$$



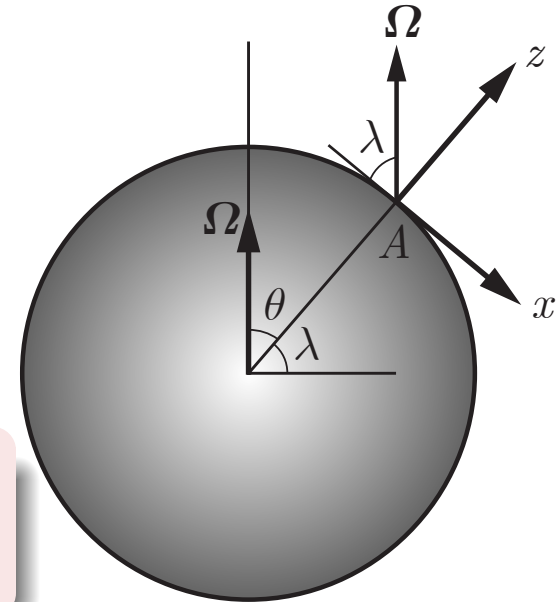
- **Equations de la vitesse relative :** (11.31)

- ① $\dot{x} = 2 \Omega y \sin \lambda$

- ③ $\dot{z} = -gt + v_0 + 2 \Omega y \cos \lambda$

- **Equation horaire relative :** axe Ay

$$y(t) = -\Omega \cos \lambda \left(v_0 t^2 - \frac{1}{3} g t^3 \right) \quad (11.36)$$



- **Equations de la vitesse relative :** (11.36) dans (11.31) au 1^{er} ordre

- ① $\dot{x} = -2 \Omega^2 \sin \lambda \cos \lambda \left(v_0 t^2 - \frac{1}{3} g t^3 \right) \simeq 0 \quad (11.37)$

- ③ $\dot{z} = v_0 - gt - 2 \Omega^2 \cos^2 \lambda \left(v_0 t^2 - \frac{1}{3} g t^3 \right) \simeq v_0 - gt \quad (11.37)$

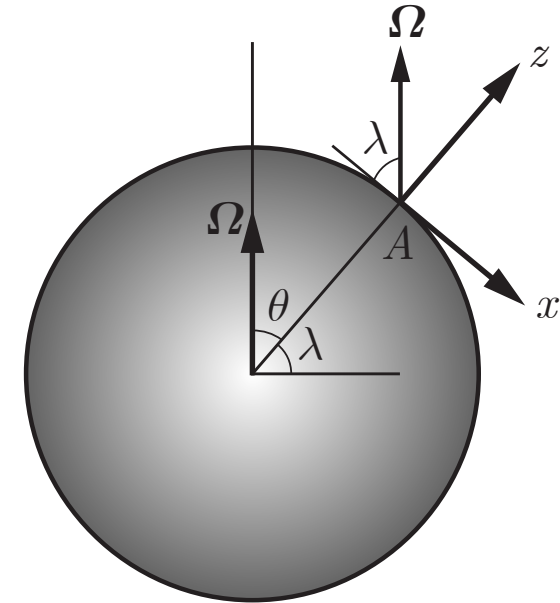
- **Equations horaires relatives** : (11.36) et intégration de (11.37) de 0 à t

$$\textcircled{1} \quad x(t) = 0 \quad (11.38)$$

$$\textcircled{2} \quad y(t) = -\Omega \cos \lambda \left(v_0 t^2 - \frac{1}{3} g t^3 \right)$$

$$\textcircled{3} \quad z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t + z_0 \quad (11.38)$$

Le mouvement relatif est un mouvement balistique vertical $z(t)$ avec une déviation le long de la latitude $y(t)$ due à la force de Coriolis générée par la rotation de la terre à vitesse angulaire scalaire Ω .



axe Ax : nord $\rightarrow$ sud

axe Ay : ouest $\rightarrow$ est

axe Az : bas $\rightarrow$ haut

- **Application numérique** : tir vertical du sol

$$\textcircled{1} \quad \text{Hauteur initiale : } z_0 = 0 \text{ m}$$

$$\textcircled{2} \quad \text{Vitesse initiale : } v_0 = 10 \text{ m/s}$$

$$\textcircled{3} \quad \text{Latitude : } \lambda = 0.80 \quad \text{et} \quad \cos \lambda = 0.69$$

- **Application numérique : tir vertical du sol**

- ❶ Hauteur initiale : $z_0 = 0$ m
- ❷ Vitesse initiale : $v_0 = 10$ m/s
- ❸ Latitude : $\lambda = 0.80$ et $\cos \lambda = 0.69$

- **Temps d'ascension :**

$$\dot{z}(T) = -gT + v_0 = 0$$

$$T = \frac{v_0}{g} = \frac{10}{9.81} \text{ s} = 1.02 \text{ s}$$

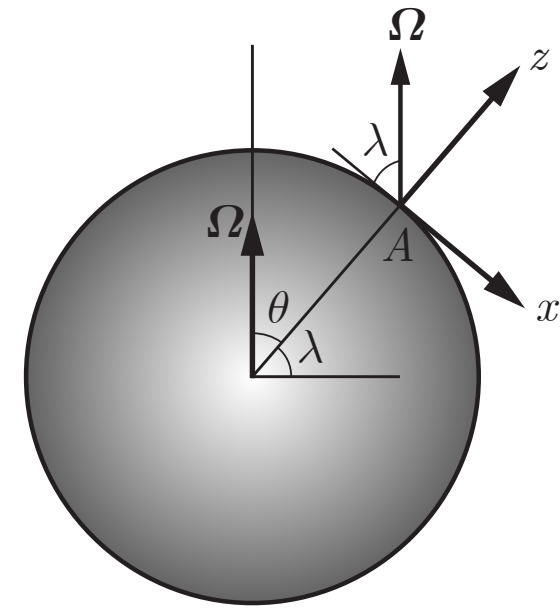
(11.39)

- **Hauteur maximale :**

$$z(T) = -\frac{1}{2}gT^2 + v_0T = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{10^2}{2 \cdot 9.81} \text{ m} = 5.10 \text{ m} \quad (11.40)$$

- **Déviations horizontales : vers l'ouest négligeable en pratique (11.41)**

$$y(2T) = -\frac{4}{3} \frac{v_0^3}{g^2} \Omega \cos \lambda = -\frac{4 \cdot 10^3 \cdot 7.27 \cdot 10^{-5} \cdot 0.69}{3 \cdot 9.81^2} \text{ m} = -0.69 \text{ mm}$$

axe Ax : nord $\rightarrow$ sudaxe Ay : ouest $\rightarrow$ estaxe Az : bas $\rightarrow$ haut

- **Modèle** : influence de la rotation de la terre sur le mouvement relatif des masses d'air (point matériel P) dans le plan horizontal Pxy .
- **Equations du mouvement relatif** : (11.28)
avec $z = \text{cste}$ et $\dot{z} = 0$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \ddot{x} &= 2 \Omega \sin \lambda \dot{y} \\ \textcircled{2} \quad \ddot{y} &= -2 \Omega \sin \lambda \dot{x} \end{aligned} \quad (11.42)$$

- **Vitesse et accélération relatives** :

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \mathbf{v}_r(P) &= \dot{x} \hat{\mathbf{x}} + \dot{y} \hat{\mathbf{y}} \\ \textcircled{2} \quad \mathbf{a}_r(P) &= \ddot{x} \hat{\mathbf{x}} + \ddot{y} \hat{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (11.43)$$

- **Mouvement relatif circulaire** : (11.42) et (11.43)

$$\mathbf{v}_r(P) \cdot \mathbf{a}_r(P) = \dot{x} \ddot{x} + \dot{y} \ddot{y} = 2 \Omega \sin \lambda (\dot{x} \dot{y} - \dot{y} \dot{x}) = 0 \quad (11.44)$$

La vitesse angulaire scalaire $\omega = 2 \Omega \sin \lambda$ du mouvement circulaire des masses d'air change de signe à l'équateur (sens de rotation inverse).



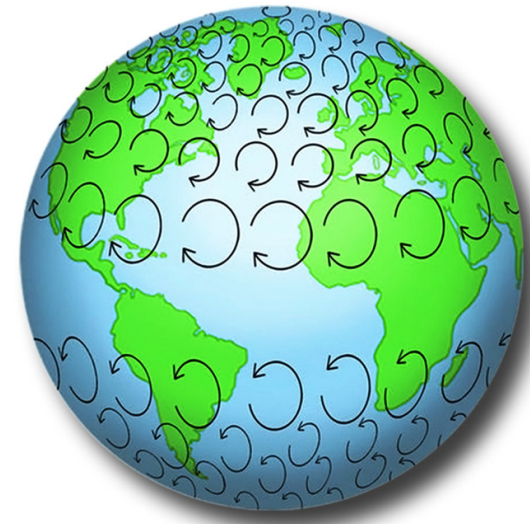
- **Vitesse angulaire scalaire :**

$$\omega = 2 \Omega \sin \lambda \quad (11.45)$$

① Hémisphère nord : $\lambda > 0$ ainsi $\omega > 0$

② Hémisphère sud : $\lambda < 0$ ainsi $\omega < 0$

③ Equateur : $\lambda = 0$ ainsi $\omega = 0$

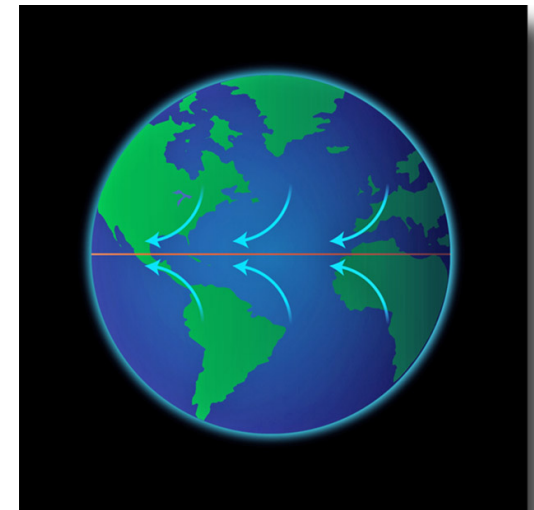


- **Equations du mouvement relatif :**

① $\ddot{x} = \omega \dot{y}$

② $\ddot{y} = -\omega \dot{x}$ (11.46)

- **Alizés :** la vitesse angulaire scalaire ω s'annule à l'équateur. Ainsi, les masses d'air convergent vers l'équateur avec un mouvement relatif orienté d'est en ouest.



- Equations du mouvement relatif :

$$① \quad \ddot{x} = \omega \dot{y}$$

$$② \quad \ddot{y} = -\omega \dot{x} \quad (11.46)$$

- Trajectoires circulaires : 4 quadrants

$$① \quad \omega > 0 : a) \quad \dot{y} > 0 \rightarrow \ddot{x} > 0$$

$$b) \quad \dot{y} < 0 \rightarrow \ddot{x} < 0$$

$$② \quad \omega > 0 : a) \quad \dot{x} > 0 \rightarrow \ddot{y} < 0$$

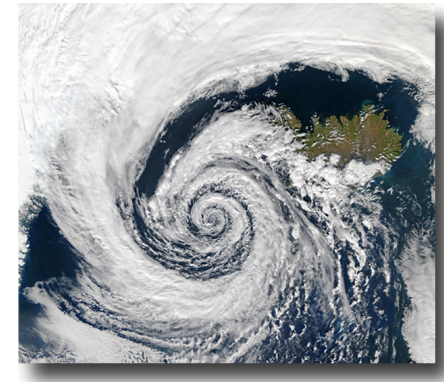
$$b) \quad \dot{x} < 0 \rightarrow \ddot{y} > 0$$

$$③ \quad \omega < 0 : a) \quad \dot{y} > 0 \rightarrow \ddot{x} < 0$$

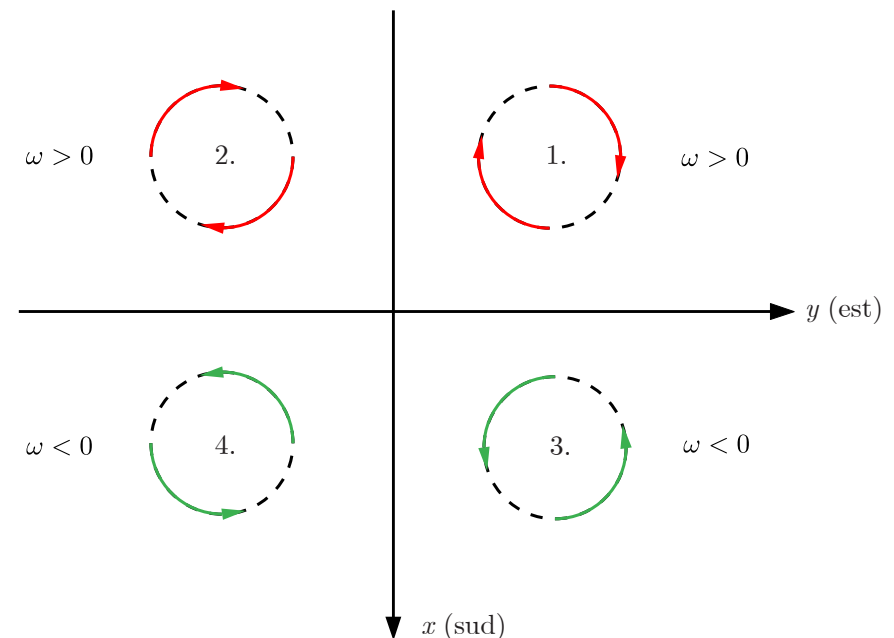
$$b) \quad \dot{y} < 0 \rightarrow \ddot{x} > 0$$

$$④ \quad \omega < 0 : a) \quad \dot{x} > 0 \rightarrow \ddot{y} > 0$$

$$b) \quad \dot{x} < 0 \rightarrow \ddot{y} < 0$$



Cyclones : spirales logarithmiques dues à un gradient de pression



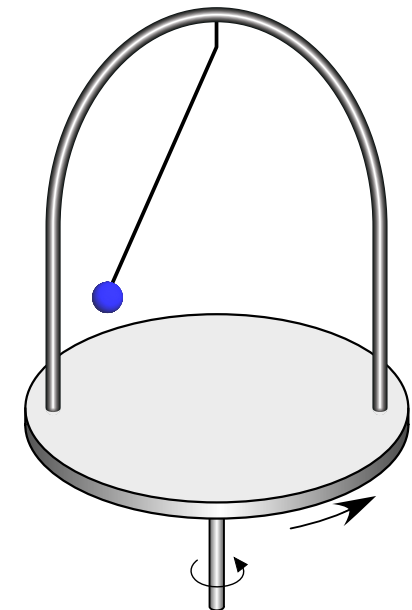
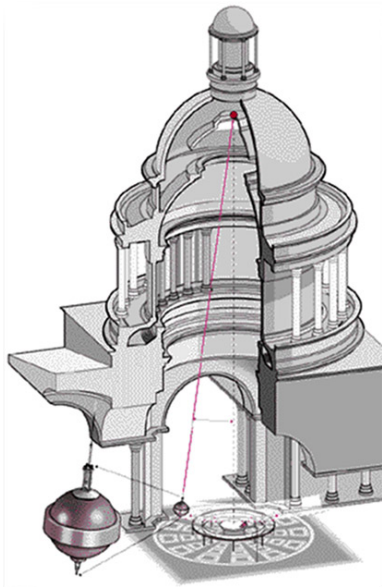
11.2 Pendule de Foucault

- Léon Foucault a démontré la rotation de la terre grâce à la rotation du plan vertical d'un pendule suspendu au sommet du dôme du Panthéon (Paris, 1851).

- 1 Masse : $m = 28 \text{ kg}$
- 2 Longueur : $\ell = 67 \text{ m}$
- 3 Période : $T = 16 \text{ s}$

Léon Foucault

1819 – 1868





- On fait osciller le pendule dans un plan vertical fixe. Puis, on fait tourner le support à vitesse angulaire constante dans un sens. Par rapport au support en rotation, on remarque que le plan vertical d'oscillation tourne en sens inverse.
- Le support en rotation représente le référentiel relatif de la terre en rotation propre sur elle-même. Le pendule (de Foucault) va tourner dans le sens opposé au sens de rotation propre de la terre par rapport au référentiel absolu du système solaire.

- **Pendule** : point matériel P attaché en A
- **Référentiel absolu** : système solaire (fixe)
- **Référentiel relatif** : terre (en rotation)

Repère cartésien $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$

Repère sphérique $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$

- **Forces extérieures** :

① Poids : $\mathbf{P} = m \mathbf{g}$

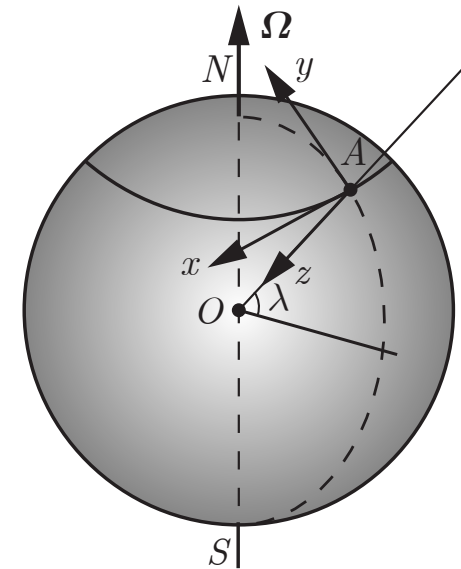
② Tension : $\mathbf{T}$

- **Force d'inertie** :

① Force de Coriolis : $\mathbf{F}_C = -2m \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_r(P)$

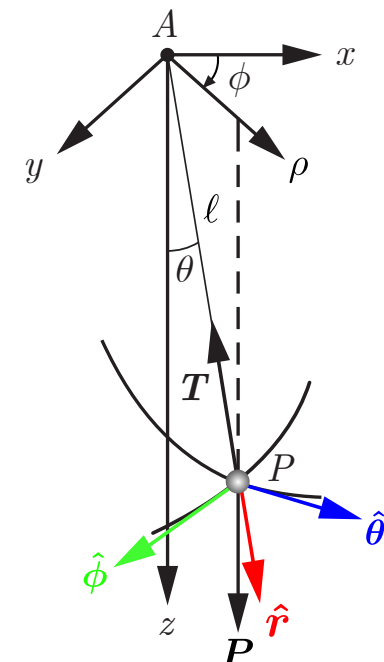
- **Loi du mouvement relatif** : (11.47)

$$\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} + \mathbf{F}^{\text{in}} = \mathbf{P} + \mathbf{T} + \mathbf{F}_C = m \mathbf{a}_r(P)$$



Ax : vers ouest

Ay : vers nord



- **Vecteurs unitaires : changement de base**

- 1 $\hat{\rho} = \sin \theta \hat{r} + \cos \theta \hat{\theta}$

- 2 $\hat{z} = \cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}$

(11.48)

- 3 $\hat{y} = \cos \phi \hat{\phi} + \sin \phi \hat{\rho}$
 $= \sin \phi \sin \theta \hat{r} + \sin \phi \cos \theta \hat{\theta} + \cos \phi \hat{\phi}$

- **Approximations : $\theta \ll 1$ et $\Omega, \dot{\phi}$ petits**

- 1 $\theta \ll 1$ ainsi $\sin \theta = \theta$ et $\cos \theta = 1$

- 2 On néglige les termes suivants : $\theta, \Omega, \dot{\phi}$ petits

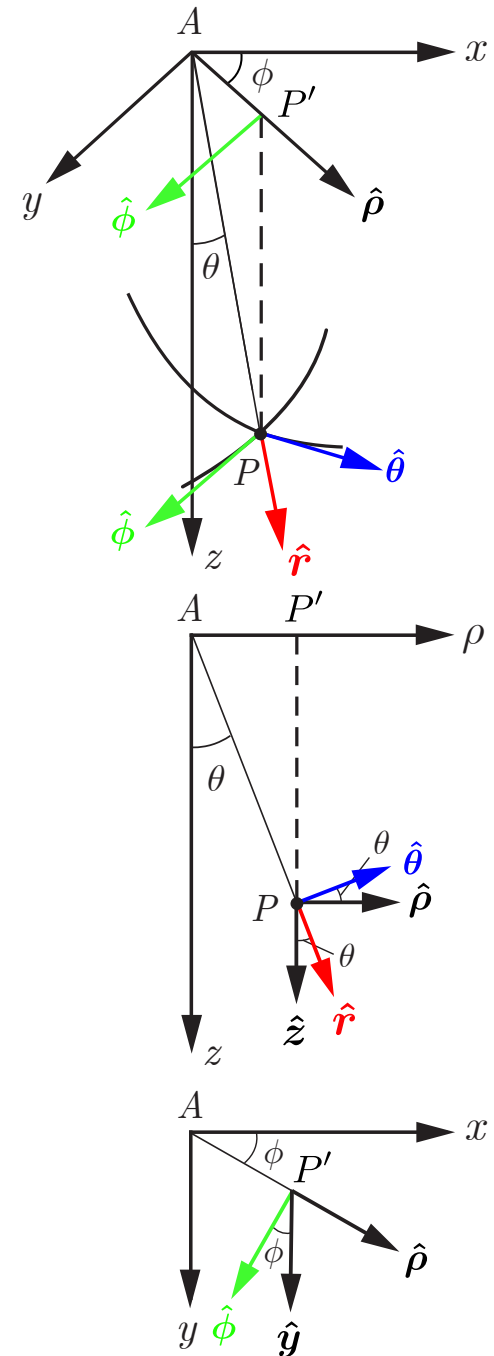
$$\theta^2 \quad \Omega^2 \quad \dot{\phi}^2 \quad \theta \Omega \quad \theta \dot{\phi} \quad \Omega \dot{\phi}$$

- **Vecteurs unitaires : approximés**

- 1 $\hat{y} = \theta \sin \phi \hat{r} + \sin \phi \hat{\theta} + \cos \phi \hat{\phi}$

- 2 $\hat{z} = \hat{r} - \theta \hat{\theta}$

(11.49)



- **Vecteurs unitaires** : approximés

- 1 $\hat{y} = \theta \sin \phi \hat{r} + \sin \phi \hat{\theta} + \cos \phi \hat{\phi}$

- 2 $\hat{z} = \hat{r} - \theta \hat{\theta}$

(11.49)

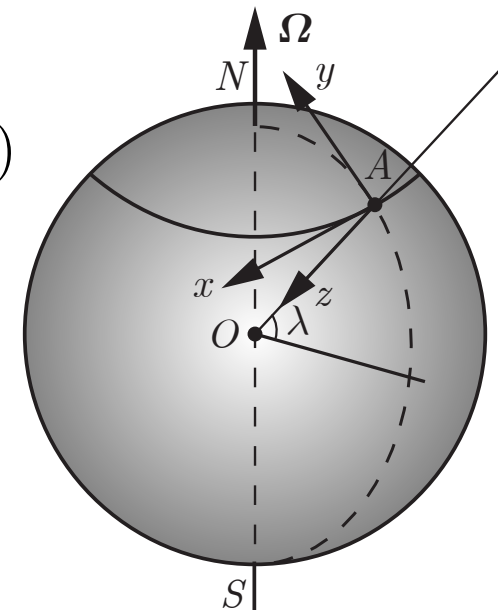
- **Forces extérieures** : (11.50)

- 1 Poids :

$$\mathbf{P} = m \mathbf{g} = mg \hat{z} = mg (\hat{r} - \theta \hat{\theta})$$

- 2 Tension :

$$\mathbf{T} = -T \hat{r}$$



Ax: vers ouest

Ay: vers nord

- **Vitesse angulaire** :

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega \cos \lambda \hat{y} - \Omega \sin \lambda \hat{z}$$

$$= \Omega \cos \lambda (\theta \sin \phi \hat{r} + \sin \phi \hat{\theta} + \cos \phi \hat{\phi}) - \Omega \sin \lambda (\hat{r} - \theta \hat{\theta})$$

$$= -\Omega \sin \lambda \hat{r} + \Omega \cos \lambda \sin \phi \hat{\theta} + \Omega \cos \lambda \cos \phi \hat{\phi} \quad (11.51)$$

- **Contraintes géométriques :**

$$r = \ell = \text{cste} \quad \text{et} \quad \dot{\phi} = \text{cste} \quad (11.52)$$

- **Vitesse et accélération relatives :** approximées (référentiel de la terre)

$$\mathbf{v}_r(P) = \ell \dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad \text{et} \quad \mathbf{a}_r(P) = -\ell \dot{\theta}^2 \hat{\mathbf{r}} + \ell \ddot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + 2\ell \dot{\theta} \dot{\phi} \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (11.53)$$

- **Forces extérieures :** poids et tension

$$\mathbf{P} = mg \left(\hat{\mathbf{r}} - \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \right) \quad \text{et} \quad \mathbf{T} = -T \hat{\mathbf{r}} \quad (11.50)$$

- **Force d'inertie :** force de Coriolis

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_C &= -2m \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_r(P) \\ &= -2m \left(-\Omega \sin \lambda \hat{\mathbf{r}} + \cancel{\Omega \cos \lambda \sin \phi \hat{\boldsymbol{\theta}}} + \Omega \cos \lambda \cos \phi \hat{\boldsymbol{\phi}} \right) \times \ell \dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ &= 2m \ell \dot{\theta} \Omega \cos \lambda \cos \phi \hat{\mathbf{r}} + 2m \ell \dot{\theta} \Omega \sin \lambda \hat{\boldsymbol{\phi}} \end{aligned} \quad (11.54)$$

- **Loi du mouvement relatif :**

$$\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} + \mathbf{F}^{\text{in}} = \mathbf{P} + \mathbf{T} + \mathbf{F}_C = m \mathbf{a}_r(P) \quad (11.47)$$

- **Forces extérieures** : poids et tension

$$\mathbf{P} = mg \left(\hat{\mathbf{r}} - \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \right) \quad \text{et} \quad \mathbf{T} = -T \hat{\mathbf{r}} \quad (11.50)$$

- **Force d'inertie** : force de Coriolis

$$\mathbf{F}_C = 2m\ell\dot{\theta}\Omega \cos\lambda \cos\phi \hat{\mathbf{r}} + 2m\ell\dot{\theta}\Omega \sin\lambda \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (11.54)$$

- **Accélération relative** :

$$\mathbf{a}_r(P) = -\ell\dot{\theta}^2 \hat{\mathbf{r}} + \ell\ddot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + 2\ell\dot{\theta}\dot{\phi} \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (11.53)$$

- **Loi du mouvement relatif** :

$$\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} + \mathbf{F}^{\text{in}} = \mathbf{P} + \mathbf{T} + \mathbf{F}_C = m \mathbf{a}_r(P) \quad (11.47)$$

- **Equations du mouvement relatif** :

$$\textcircled{1} \quad \text{selon } \hat{\mathbf{r}} : \quad mg - T + 2m\ell\dot{\theta}\Omega \cos\lambda \cos\phi = -m\ell\dot{\theta}^2$$

$$\textcircled{2} \quad \text{selon } \hat{\boldsymbol{\theta}} : \quad -mg\theta = m\ell\ddot{\theta} \quad (11.55)$$

$$\textcircled{3} \quad \text{selon } \hat{\boldsymbol{\phi}} : \quad 2m\ell\dot{\theta}\Omega \sin\lambda = 2m\ell\dot{\theta}\dot{\phi}$$

1 **Equation de contrainte : tension**

$$T = m \left(g + \underbrace{\ell \dot{\theta}^2}_{\text{centrifuge}} + \underbrace{2\ell \dot{\theta} \Omega \cos \lambda \cos \phi}_{\text{Coriolis}} \right) \quad (11.56)$$

2 **Equation du mouvement : oscillateur harmonique**

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0 \quad \text{où} \quad \omega^2 = \frac{g}{\ell} \quad (11.57)$$

3 **Vitesse angulaire : rotation du plan d'oscillation vertical**

$$\dot{\phi} = \Omega \sin \lambda \quad (11.58)$$

La vitesse angulaire $\dot{\phi}$ change de signe à l'équateur ($\lambda = 0$) ce qui signifie que le plan d'oscillation vertical du pendule tourne en sens inverse dans l'autre hémisphère.

• **Période de rotation :**

$$T = \frac{2\pi}{\dot{\phi}} = \frac{2\pi}{\Omega \sin \lambda} \quad (11.59)$$

- Période de rotation :

$$T = \frac{2\pi}{\dot{\phi}} = \frac{2\pi}{\Omega \sin \lambda} \quad (11.59)$$

- Application numérique :

❶ **Pôle** : $\lambda = \pi/2$ ainsi $\sin \lambda = 1$

$$T = \frac{2\pi}{\Omega \sin \lambda} = \frac{2\pi}{7.27 \cdot 10^{-5}} \text{ s} = 24 \text{ h}$$

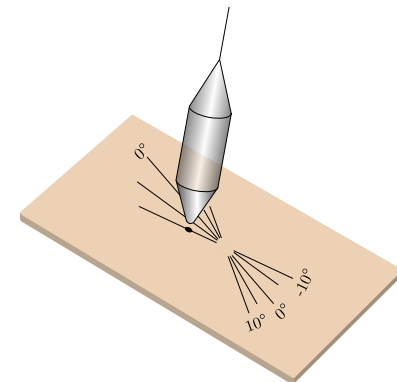
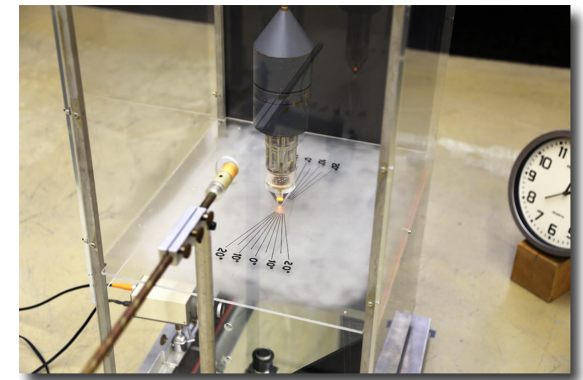
❷ **Equateur** : $\lambda = 0$ ainsi $\sin \lambda = 0$

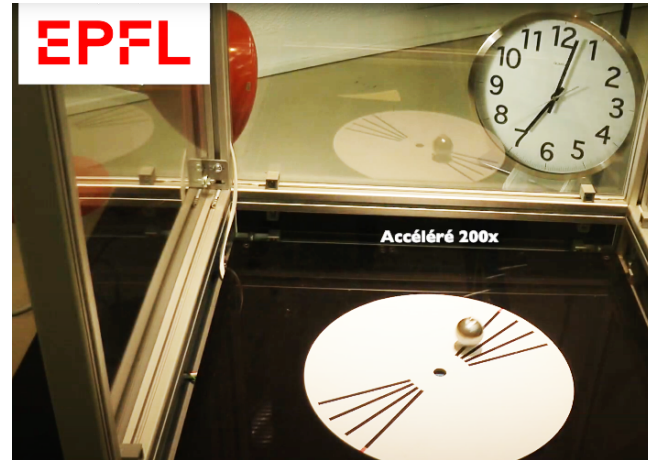
$$T = \frac{2\pi}{\Omega \sin \lambda} = \infty \quad (11.61)$$

❸ **Lausanne** : $\lambda = 0.8$ ainsi $\sin \lambda = 0.72$

$$T = \frac{2\pi}{\Omega \sin \lambda} = \frac{2\pi}{7.27 \cdot 10^{-5} \cdot 0.72} \text{ s} = 33.3 \text{ h}$$

$$\dot{\phi} = \frac{360^\circ}{33.3} \text{ h}^{-1} = 10.8^\circ \text{ h}^{-1} \quad (11.63)$$





- Le mouvement de rotation propre de la terre donne lieu à la rotation du plan d'oscillation d'un pendule mathématique.
- Au pôle nord, ce plan d'oscillation n'a pas de mouvement de rotation par rapport au plan du système solaire. Par conséquent, comme la terre tourne dans le sens trigonométrique en vue d'avion avec une période d'oscillation d'un jour, le pendule tournera par rapport à la terre dans le sens des aiguilles d'une montre avec la même période. Au pôle sud, c'est exactement l'inverse. A l'équateur, il n'y a pas de mouvement de rotation, donc une période de rotation infinie.
- A Lausanne, la période d'oscillation est de 33.3 h et la vitesse angulaire de $10.8^\circ \text{ h}^{-1}$.

11.3 Système de points matériels

11.3.1 Centre de masse

11.3.2 Cinématique d'un système de points matériels

11.3.3 Dynamique d'un système de points matériels

11.3.4 Principes de conservation

- **Système** : ensemble de points matériels P_α de masse m_α .

- **Masse** : système de points matériels

$$M = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \quad (11.64)$$

- **Centre de masse** : point G (barycentre)

$$\mathbf{OG} = \frac{1}{M} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{OP}_{\alpha} \quad (11.65)$$

- **Unicité** : le centre de masse G est unique et indépendant de l'origine O

$$\begin{aligned} \mathbf{O'G'} &= \frac{1}{M} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{O'P}_{\alpha} = \frac{1}{M} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\mathbf{O'O} + \mathbf{OP}_{\alpha}) \\ &= \left(\frac{1}{M} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \right) \mathbf{O'O} + \frac{1}{M} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{OP}_{\alpha} = \mathbf{O'O} + \mathbf{OG} = \mathbf{O'G} \end{aligned} \quad (11.66)$$

- **Positions :**

- ① Position du centre de masse G : $\mathbf{R}_G = \mathbf{OG}$

- ② Position du point P_α : $\mathbf{r}_\alpha = \mathbf{OP}_\alpha$

(11.67)

- ③ Position relative du point P_α : $\mathbf{r}'_\alpha = \mathbf{GP}_\alpha$

- **Relation entre les positions :**

$$\mathbf{OP}_\alpha = \mathbf{OG} + \mathbf{GP}_\alpha \quad \text{ainsi} \quad \mathbf{r}_\alpha = \mathbf{R}_G + \mathbf{r}'_\alpha \quad (11.68)$$

- **Position du centre de masse :**

$$\mathbf{R}_G = \frac{1}{M} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \quad (11.69)$$

- **Identité vectorielle :** (11.68) et (11.69) donne (11.70)

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}'_{\alpha} \stackrel{(11.68)}{=} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{R}_G) = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} - M \mathbf{R}_G \stackrel{(11.69)}{=} \mathbf{0}$$

- **Vitesses :**

- ① Vitesse du centre de masse G : $\mathbf{V}_G = \dot{\mathbf{R}}_G$

- ② Vitesse du point P_α : $\mathbf{v}_\alpha = \dot{\mathbf{r}}_\alpha$ (11.71)

- ③ Vitesse relative du point P_α : $\mathbf{v}'_\alpha = \dot{\mathbf{r}}'_\alpha$

- **Relation entre les vitesses :**

$$\dot{\mathbf{r}}_\alpha = \dot{\mathbf{R}}_G + \dot{\mathbf{r}}'_\alpha \quad \text{ainsi} \quad \mathbf{v}_\alpha = \mathbf{V}_G + \mathbf{v}'_\alpha \quad (11.72)$$

- **Vitesse du centre de masse :**

$$\dot{\mathbf{R}}_G = \frac{1}{M} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}_{\alpha} \quad \text{ainsi} \quad \mathbf{V}_G = \frac{1}{M} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} \quad (11.73)$$

- **Identité vectorielle :** (11.72) et (11.73) donne (11.74)

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{v}'_{\alpha} \stackrel{(11.72)}{=} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\mathbf{v}_{\alpha} - \mathbf{V}_G) = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} - M \mathbf{V}_G \stackrel{(11.73)}{=} \mathbf{0}$$

- **Accélérations :**

- ① Accélération du centre de masse G : $\mathbf{A}_G = \dot{\mathbf{V}}_G$

- ② Accélération du point P_α : $\mathbf{a}_\alpha = \dot{\mathbf{v}}_\alpha$ (11.75)

- ③ Accélération relative du point P_α : $\mathbf{a}'_\alpha = \dot{\mathbf{v}}'_\alpha$

- **Relation entre les accélérations :**

$$\dot{\mathbf{v}}_\alpha = \dot{\mathbf{V}}_G + \dot{\mathbf{v}}'_\alpha \quad \text{ainsi} \quad \mathbf{a}_\alpha = \mathbf{A}_G + \mathbf{a}'_\alpha \quad (11.76)$$

- **Accélération du centre de masse :**

$$\dot{\mathbf{V}}_G = \frac{1}{M} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\mathbf{v}}_{\alpha} \quad \text{ainsi} \quad \mathbf{A}_G = \frac{1}{M} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{a}_{\alpha} \quad (11.77)$$

- **Identité vectorielle :** (11.76) et (11.77) donne (11.78)

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{a}'_{\alpha} \stackrel{(11.76)}{=} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\mathbf{a}_{\alpha} - \mathbf{A}_G) = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{a}_{\alpha} - M \mathbf{A}_G \stackrel{(11.77)}{=} \mathbf{0}$$

- Quantité de mouvement d'un point matériel : P_α

$$\mathbf{p}_\alpha = m_\alpha \mathbf{v}_\alpha \quad (11.79)$$

- Moment cinétique d'un point matériel : P_α

$$\mathbf{L}_{O,\alpha} = \mathbf{OP}_\alpha \times \mathbf{p}_\alpha = \mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{p}_\alpha \quad (11.80)$$

- Moment de force : exercée par la force $\mathbf{F}_\alpha$ sur P_α

$$\mathbf{M}_{O,\alpha} = \mathbf{OP}_\alpha \times \mathbf{F}_\alpha = \mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{F}_\alpha \quad (11.81)$$

- 2^e loi de Newton et théorème du moment cinétique : P_α

$$\dot{\mathbf{p}}_\alpha = \mathbf{F}_\alpha \quad \text{et} \quad \dot{\mathbf{L}}_{O,\alpha} = \mathbf{M}_{O,\alpha} \quad (11.82)$$

- 3^e loi de Newton : forces intérieures au système

$$\mathbf{F}^{\alpha \rightarrow \beta} = -\mathbf{F}^{\beta \rightarrow \alpha} \quad \forall \quad \alpha, \beta \quad (11.83)$$

- Force intérieure résultante :

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} \mathbf{F}_\alpha^{\text{int}} &= \sum_{\alpha} \sum_{\beta \mid \beta \neq \alpha} \mathbf{F}^{\beta \rightarrow \alpha} = \sum_{\alpha} \sum_{\beta \mid \beta > \alpha} \mathbf{F}^{\beta \rightarrow \alpha} + \sum_{\alpha} \sum_{\beta \mid \beta < \alpha} \mathbf{F}^{\beta \rightarrow \alpha} \\ &\stackrel{\substack{\alpha \leftrightarrow \beta \\ \text{2^e terme}}}{=} \sum_{\alpha} \sum_{\beta \mid \beta > \alpha} (\mathbf{F}^{\beta \rightarrow \alpha} + \mathbf{F}^{\alpha \rightarrow \beta}) \stackrel{(11.83)}{=} \mathbf{0} \end{aligned} \quad (11.84)$$

- Force intérieure orientée entre les points matériels : P_α et P_β

$$P_\beta P_\alpha \times \mathbf{F}^{\beta \rightarrow \alpha} = \mathbf{0} \quad \forall \quad \alpha, \beta \quad (11.85)$$

- Moment de forces intérieures résultant :

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} M_{O,\alpha}^{\text{int}} &= \sum_{\alpha} \mathbf{OP}_{\alpha} \times \mathbf{F}_{\alpha}^{\text{int}} = \sum_{\alpha} \sum_{\beta \mid \beta \neq \alpha} \mathbf{OP}_{\alpha} \times \mathbf{F}^{\beta \rightarrow \alpha} \\ &= \sum_{\alpha} \sum_{\beta \mid \beta > \alpha} \mathbf{OP}_{\alpha} \times \mathbf{F}^{\beta \rightarrow \alpha} + \sum_{\alpha} \sum_{\beta \mid \beta < \alpha} \mathbf{OP}_{\alpha} \times \mathbf{F}^{\beta \rightarrow \alpha} \\ &\stackrel{\alpha \leftrightarrow \beta}{=} \sum_{\alpha} \sum_{\beta \mid \beta > \alpha} (\mathbf{OP}_{\alpha} \times \mathbf{F}^{\beta \rightarrow \alpha} + \mathbf{OP}_{\beta} \times \mathbf{F}^{\alpha \rightarrow \beta}) \\ &\stackrel{\text{2e terme}}{=} \sum_{\alpha} \sum_{\beta \mid \beta > \alpha} (\mathbf{OP}_{\alpha} - \mathbf{OP}_{\beta}) \times \mathbf{F}^{\beta \rightarrow \alpha} \\ &\stackrel{(11.83)}{=} \sum_{\alpha} \sum_{\beta \mid \beta > \alpha} \mathbf{P}_{\beta} \mathbf{P}_{\alpha} \times \mathbf{F}^{\beta \rightarrow \alpha} \stackrel{(11.85)}{=} \mathbf{0} \end{aligned} \quad (11.86)$$

- **Quantité de mouvement totale : système**

$$P = \sum_{\alpha} p_{\alpha} \quad (11.87)$$

- **Moment cinétique total : système**

$$L_O = \sum_{\alpha} L_{O,\alpha} \quad (11.87)$$

- **Quantité de mouvement totale : système**

$$\begin{aligned} P &\stackrel{(11.79)}{=} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} \stackrel{(11.72)}{=} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\mathbf{V}_G + \mathbf{v}'_{\alpha}) \\ &\stackrel{(11.64)}{=} M \mathbf{V}_G + \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{v}'_{\alpha} \stackrel{(11.74)}{=} M \mathbf{V}_G \end{aligned} \quad (11.88)$$

- **Somme des forces extérieures : exercée sur le système**

$$\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} \equiv \sum_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha}^{\text{ext}} \quad (11.89)$$

- **Somme des moments de forces extérieures : exercés sur le système**

$$\sum M_O^{\text{ext}} \equiv \sum_{\alpha} M_{O,\alpha}^{\text{ext}} \quad (11.89)$$

- Dérivée temporelle de la quantité de mouvement totale : système

$$\dot{P} = \sum_{\alpha} \dot{p}_{\alpha} = \sum_{\alpha} F_{\alpha} = \sum_{\alpha} \cancel{F_{\alpha}^{\text{int}}} + \sum_{\alpha} F_{\alpha}^{\text{ext}} = \sum F^{\text{ext}} \quad (11.90)$$

- Théorème de la quantité de mouvement : système

$$\sum F^{\text{ext}} = \dot{P} \quad (11.91)$$

- Théorème de la quantité de mouvement : masse constante

$$\sum F^{\text{ext}} = \dot{P} = \cancel{\dot{M} V_G} + M \dot{V}_G = M A_G \quad (11.92)$$

- Théorème du centre de masse :

$$\sum F^{\text{ext}} = M A_G \quad (11.93)$$

- Dérivée temporelle du moment cinétique total : système (11.94)

$$\dot{L}_O = \sum_{\alpha} \dot{L}_{O,\alpha} = \sum_{\alpha} M_{O,\alpha} = \sum_{\alpha} \cancel{M_{O,\alpha}^{\text{int}}} + \sum_{\alpha} M_{O,\alpha}^{\text{ext}} = \sum M_O^{\text{ext}}$$

- Théorème du moment cinétique : système

$$\sum M_O^{\text{ext}} = \dot{L}_O \quad (11.95)$$

- Système isolé :

- ① Principe de conservation de la quantité de mouvement :

$$\sum F^{\text{ext}} = \dot{P} = 0 \quad \text{ainsi} \quad P = \text{cste} \quad (11.96)$$

- ② Principe de conservation du moment cinétique :

$$\sum M_O^{\text{ext}} = \dot{L}_O = 0 \quad \text{ainsi} \quad L_O = \text{cste} \quad (11.97)$$



$$P = \text{cste}$$



$$L_O = \text{cste}$$